

# Invariants birationnels dans la suite spectrale de Bloch-Ogus

Alena Pirutka

16 juin 2011

## Résumé

On établit l'invariance birationnelle des groupes  $H^i(X, \mathcal{H}^{n+d}(\mu_{l^r}^{\otimes j}))$  pour  $X$  une variété projective et lisse, géométriquement intègre, de dimension  $n$ , définie sur un corps  $k$  de dimension cohomologique au plus  $d$ ,  $(l, \text{car}.k) = 1$ . On obtient aussi un résultat analogue sur un corps fini pour les groupes  $H^i(X, \mathcal{H}^n(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(j)))$  et on relie un de ces invariants avec le conoyau de l'application classe de cycle  $CH^{n-1}(X) \otimes \mathbb{Z}_l \rightarrow H_{\text{ét}}^{2n-2}(X, \mathbb{Z}_l(n-1))$ , ce qui donne une version sur un corps fini d'un résultat de Colliot-Thélène et Voisin [4] 3.11 sur le corps des complexes.

## 1 Introduction

Soit  $k$  un corps. Pour  $n$  un entier inversible sur  $k$ , on note  $\mu_n$  le  $k$ -schéma en groupes (étale) des racines  $n$ -ièmes de l'unité. Pour  $j$  un entier positif on note  $\mu_n^{\otimes j} = \mu_n \otimes \dots \otimes \mu_n$  ( $j$  fois). On pose  $\mu_n^{\otimes j} = \text{Hom}_{k\text{-gr}}(\mu_n^{\otimes(-j)}, \mathbb{Z}/n)$  si  $j$  est négatif et  $\mu_n^{\otimes 0} = \mathbb{Z}/n$ . Ces  $k$ -schémas en groupes donnent des faisceaux étales, notés encore  $\mu_n^{\otimes j}$ , sur toute variété définie sur  $k$ .

Soit  $X$  une  $k$ -variété intègre, projective et lisse. On note  $\mathcal{H}_X^i(\mu_n^{\otimes j})$  le faisceau de Zariski sur  $X$  associé au préfaisceau  $U \mapsto H_{\text{ét}}^i(U, \mu_n^{\otimes j})$ . La conjecture de Gersten, établie par Bloch et Ogus ([1]) permet de calculer les groupes de cohomologie de ces faisceaux comme les groupes de cohomologie du complexe

$$0 \rightarrow H^i(k(X), \mu_n^{\otimes j}) \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(1)}} H^{i-1}(\kappa(x), \mu_n^{\otimes(j-1)}) \rightarrow \dots \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(r)}} H^{i-r}(\kappa(x), \mu_n^{\otimes(j-r)}) \rightarrow \dots$$

où  $X^{(r)}$  désigne l'ensemble des points de codimension  $r$  de  $X$ ;  $\kappa(x)$  est le corps résiduel du point  $x$ . Les flèches de ce complexe sont induites par des résidus et le terme  $\bigoplus_{x \in X^{(r)}}$  est en degré  $r$ .

On a une suite spectrale (cf. [1])

$$E_2^{pq} = H^p(X, \mathcal{H}^q(\mu_n^{\otimes j})) \Rightarrow H_{\text{ét}}^{p+q}(X, \mu_n^{\otimes j}). \quad (1)$$

Les termes  $E_2^{0q}$  de cette suite spectrale s'identifient à des groupes de cohomologie non ramifiée  $H_{\text{nr}}^i(X, \mu_n^{\otimes j})$  qui sont des invariants birationnels des  $k$ -variétés intègres

projectives et lisses (cf. [2]). Dans ce texte on s'intéresse à d'autres invariants birationnels dans (1).

Pour  $k$  un corps de dimension cohomologique au plus  $d$  on établit l'invariance birationnelle des groupes  $H^i(X, \mathcal{H}^{n+d}(\mu_{l^r}^{\otimes j}))$ . Ceci est fait dans la section 3 par un argument d'action des correspondances. Cette action est fournie par la théorie de cycles de Rost, dont on fait des rappels dans la section 2. D'après la conjecture de Kato ([16], [17]) les groupes  $H^i(X, \mathcal{H}^{n+1}(\mu_{l^r}^{\otimes n}))$ ,  $i < n$ , sont nuls pour  $X$  une variété projective et lisse, géométriquement intègre, de dimension  $n$ , définie sur un corps fini  $\mathbb{F}$ , avec  $r$  premier à la caractéristique de  $\mathbb{F}$ . Dans ce cas, on établit l'invariance birationnelle des groupes  $H^i(X, \mathcal{H}^n(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(j)))$ , cf. 4.2. Dans la section 4.3, on montre que le quotient du groupe  $H^{n-3}(X, \mathcal{H}^n(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(n-1)))$  par son sous-groupe divisible maximal est isomorphe au groupe de torsion du conoyau de l'application classe de cycle  $CH^{n-1}(X) \otimes \mathbb{Z}_l \rightarrow H_{\text{ét}}^{2n-2}(X, \mathbb{Z}_l(n-1))$ .

**Remerciements.** Je voudrais remercier mon directeur de thèse, Jean-Louis Colliot-Thélène, de m'avoir introduit aux problèmes considérés dans ce texte, pour de nombreuses discussions et pour son aide constante.

## 2 Rappels sur les modules de cycles de Rost

Tous les énoncés de ce paragraphe se trouvent dans les articles de Rost [20] et de Déglise [5].

Soit  $k$  un corps, soit  $X$  un  $k$ -schéma équidimensionnel et soit  $\mathcal{F}(X)$  une classe de corps sur  $X$  (corps qui contiennent un corps résiduel d'un point de  $X$ ).

1. On peut voir un **module de cycles** comme un foncteur  $M : \mathcal{F}(X) \rightarrow Ab$ ,  $M = \coprod_n M_n$ , qui satisfait certains axiomes (existence des analogues de restriction, corestriction, résidus, multiplication par  $K_1$  et compatibilités entre ces applications).

*Exemples.*

- $M_H(F) = \coprod_n H^n(F, D \otimes \mu_r^{\otimes n})$  où  $D$  est un  $G$ -module fini continu, d'exposant  $r$ .

- $M_K(F) = \coprod_n K_n^M(F)$ .

Le groupe  $K_n^M(F)$  est le  $n$ -ième groupe de  $K$ -théorie de Milnor de  $F$ . C'est le quotient de  $\underbrace{F^* \otimes \dots \otimes F^*}_{n \text{ fois}}$  par le sous-groupe engendré par des éléments

$a_1 \otimes \dots \otimes a_n$  avec  $a_i + a_j = 1$  pour  $1 \leq i < j \leq n$ . En particulier,  $K_0^M(F) = \mathbb{Z}$  et  $K_1^M(F) = F^*$ .

2. Un **accouplement**  $M \times M' \rightarrow M''$  de modules de cycles est la donnée pour tout  $F \in \mathcal{F}(X)$  de  $M(F) \times M'(F) \rightarrow M''(F)$ , qui satisfait des propriétés de compatibilité.

*Exemple.* Pour tout module de cycles  $M$ , la multiplication par  $K_1$  donne un accouplement  $M_K \times M \rightarrow M$ .

3. **Complexes et groupes de Chow.** Les groupes  $C^p(X, M) := \coprod_{x \in X^{(p)}} M(\kappa(x))$  forment un complexe

$$C(X, M) = [\dots \rightarrow C^p(X, M) \rightarrow C^{p+1}(X, M) \rightarrow \dots]$$

et on note

$$A^p(X, M) = H^p(C(X, M)).$$

*Exemples.*

- D'après la définition, le groupe de Chow  $CH^p(X)$  est un facteur direct de  $A^p(X, M_K)$ .
- Pour  $X$  lisse, d'après les résultats de Bloch et Ogus [1], on a  $A^p(X, M_H) = \coprod_n H^p(X, \mathcal{H}^n(D \otimes \mu_r^{\otimes n}))$ , où  $\mathcal{H}^n(D \otimes \mu_r^{\otimes n})$  désigne le faisceau de Zariski sur  $X$  associé au préfaisceau  $U \mapsto H^j(U, D \otimes \mu_r^{\otimes n})$ .

#### 4. Fonctorialités.

- (a) Pour  $f : Y \rightarrow X$  propre, on a  $f_* : A^p(Y, M) \rightarrow A^{p-d}(X, M)$  où  $d = \dim Y - \dim X$  est la dimension relative de  $f$  (pour simplifier, pour  $X$  et  $Y$  intègres). Ce morphisme est induit par un morphisme de complexes de bidegré  $(d, 0)$ , correspondant respectivement à la graduation de  $C$  et de  $M$  (cf. [5] 1.3). Il est fonctoriel, c'est-à-dire, pour  $g : Z \rightarrow Y$  propre, on a  $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$  ([20] 4.1).

*Exemples.*

- Pour  $Y$  de codimension 1 dans  $X$  et  $f : Y \rightarrow X$  une immersion fermée on a

$$H^p(Y, \mathcal{H}^n(D \otimes \mu_r^{\otimes n})) \rightarrow H^{p+1}(X, \mathcal{H}^{n+1}(D \otimes \mu_r^{\otimes(n+1)})).$$

- Pour  $Y$  propre et  $f : X \times Y \rightarrow X$  une projection, on a

$$H^p(X \times Y, \mathcal{H}^n(D \otimes \mu_r^{\otimes n})) \rightarrow H^{p-d}(X, \mathcal{H}^{n-d}(D \otimes \mu_r^{\otimes(n-d)}))$$

où  $d = \dim Y$ .

- (b) Pour  $f : Y \rightarrow X$  un morphisme plat, on dispose d'un morphisme  $f^* : A^p(X, M) \rightarrow A^p(Y, M)$ , induit par un morphisme de complexes de bidegré  $(0, 0)$ . Dans le cas où  $X$  et  $Y$  sont lisses, par la construction plus difficile ([20] 12, [5] 3.18) on dispose d'un morphisme  $f^* : A^p(X, M) \rightarrow A^p(Y, M)$  pour  $f : Y \rightarrow X$  quelconque. Pour  $g : Z \rightarrow Y$  avec  $Z$  lisse, on a  $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$  ([20] 12.1).

5. **Localisation.** Pour  $Y \xrightarrow{i} X$  un fermé purement de codimension  $d$  et  $U = X \setminus Y \xrightarrow{j} X$  son complémentaire, on a une longue suite exacte de localisation<sup>1</sup> ([20] 5, p.356)

$$\dots \xrightarrow{\partial} A^{p-d}(Y, M) \xrightarrow{i_*} A^p(X, M) \xrightarrow{j^*} A^p(U, M) \xrightarrow{\partial} A^{p-d+1}(Y, M) \rightarrow \dots$$

---

1. sans hypothèses de lissité

6. **Invariance homotopique.** Pour  $\pi : \mathbb{A}_X^n \rightarrow X$  la projection naturelle, l'application  $\pi^* : A^p(X, M) \rightarrow A^p(\mathbb{A}_X^n, M)$  est un isomorphisme<sup>2</sup> ([20] 8.6).
7. **Cup-produits.** Pour un accouplement  $N \times M \rightarrow M$  de modules de cycles, on a des produits

$$\times : C^p(Y, N) \times C^q(Z, M) \rightarrow C^{p+q}(Y \times Z, M).$$

Pour  $X$  lisse cela donne

$$\cup : A^*(X, N) \times A^*(X, M) \rightarrow A^*(X \times X, M) \xrightarrow{\Delta_X^*} A^*(X, M)$$

où  $\Delta_X$  est la diagonale. On a ici une formule de projection ([5] 5.9(3)) pour  $X, Y$  lisses et  $f : Y \rightarrow X$  propre

$$f_*(x \cup f^*y) = f_*x \cup y.$$

*Exemple.* En utilisant que  $CH^p(X)$  est un facteur direct de  $A^p(X, M_K)$ , pour  $X$  propre et lisse, l'accouplement  $M_K \times M \rightarrow M$  donne

$$CH^p(X) \times A^q(X, M) \rightarrow A^{p+q}(X, M).$$

Pour  $M = M_H$  cela donne

$$CH^p(X) \times H^q(X, \mathcal{H}^n(D \otimes \mu_r^{\otimes n})) \rightarrow H^{p+q}(X, \mathcal{H}^{n+p}(D \otimes \mu_r^{\otimes(n+p)})).$$

8. **Action de correspondances.** (cf. [5] §6) Étant donné une correspondance  $\alpha \in CH^p(X \times Y)$  avec  $X$  et  $Y$  propres et lisses, on définit une application  $\alpha_* : A^q(X, M) \rightarrow A^{p+q-\dim X}(Y, M)$  par la formule usuelle

$$\alpha_*(x) = p_{Y,*}(\alpha \cup p_X^*x),$$

où  $p_X$  (resp.  $p_Y$ ) est une projection de  $X \times Y$  sur le premier (resp. sur le deuxième) facteur. Au moins pour les correspondances finies, i.e. pour les correspondances  $\alpha \in CH^p(X \times Y)$  qui sont finies et surjectives sur une composante connexe de  $X$ , cette action est compatible avec la composition de correspondances, d'après [5] 6.5. Ce cas de correspondances finies nous suffira pour la suite. Dans le cas général, on peut voir qu'il suffit de vérifier les trois propriétés de [4] 9.3; on les trouve dans [5] 5.9, puis dans [20] 12.5.

### 3 Application aux invariants birationnels

Soit  $k$  un corps et soit  $X$  une  $k$ -variété projective et lisse, géométriquement intègre. Soit  $l$  un nombre premier,  $(l, \text{car}.k) = 1$ . On peut voir les groupes  $H^i(X, \mathcal{H}^m(\mu_{lr}^{\otimes j}))$  comme les groupes de Chow, associés à des modules de cycles de Rost. On dispose ainsi d'une action de correspondances sur ces groupes.

---

2. sans hypothèses de lissité

**Lemme 3.1.** Soit  $k$  un corps et soit  $X$  une  $k$ -variété projective et lisse, géométriquement intègre, de dimension  $n$ . Soit  $Z \subset X \times X$  un cycle premier de dimension  $n$ , dont l'image par la première projection est contenue dans une sous-variété fermée propre  $D \subset X$ . Soient  $i, m \geq 0$  et  $j$  des entiers. Soit  $l$  un nombre premier,  $(l, \text{car}.k) = 1$ . Supposons que le groupe  $H^i(V, \mathcal{H}^m(\mu_{lr}^{\otimes j}))$  est nul pour toute  $k$ -variété projective et lisse  $V$ , de dimension  $n - 1$ . Alors pour toute classe  $\alpha \in H^i(X, \mathcal{H}^m(\mu_{lr}^{\otimes j}))$  on a  $[Z]_*(\alpha) = 0$ .

*Démonstration.* On peut supposer que  $D$  est un diviseur sur  $X$ .

D'après le théorème de de Jong, amélioré par Gabber (cf.[8]), il existe un morphisme propre, génériquement fini  $f : X' \rightarrow X$  dont le degré  $d$  est premier à  $l$ , tel que  $X'$  est lisse et  $f^{-1}(D)_{\text{red}}$  est à croisements normaux, en particulier, ses composantes irréductibles sont lisses.

On a le diagramme commutatif suivant, où l'on note  $X_2 = X \times X$ ,  $X'_2 = X' \times X'$ ,  $\mathcal{H}^m = \mathcal{H}^m(\mu_{lr}^{\otimes j})$  et  $\mathcal{H}^{m+n} = \mathcal{H}^{m+n}(\mu_{lr}^{\otimes(n+j)})$  :

$$\begin{array}{ccccccc} CH^n(X'_2) \times H^i(X', \mathcal{H}^m) & \xrightarrow{id \times pr_1^*} & CH^n(X'_2) \times H^i(X'_2, \mathcal{H}^m) & \xrightarrow{\cup} & H^{n+i}(X'_2, \mathcal{H}^{m+n}) & \xrightarrow{pr_{2,*}} & H^i(X', \mathcal{H}^m) \\ \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* \\ CH^n(X_2) \times H^i(X, \mathcal{H}^m) & \xrightarrow{id \times pr_1^*} & CH^n(X_2) \times H^i(X_2, \mathcal{H}^m) & \xrightarrow{\cup} & H^{n+i}(X_2, \mathcal{H}^{m+n}) & \xrightarrow{pr_{2,*}} & H^i(X, \mathcal{H}^m) \end{array}$$

Le carré au milieu de ce diagramme commute d'après la formule de projection. Soit  $\alpha \in H^i(X, \mathcal{H}^m)$ . Puisque  $f_* f^*[Z] = d[Z]$  dans  $CH^n(X_2)$ , on a

$$\begin{aligned} d[Z]_*(\alpha) &= pr_{2,X,*}(d[Z] \cup pr_{1,X}^* \alpha) = pr_{2,X,*}(f_*(f^*[Z] \cup f^* pr_{1,X}^* \alpha)) = \\ &= f_*(pr_{2,X',*}(f^*[Z] \cup pr_{1,X'}^* f^* \alpha)) = f_*([f^*Z]_*(f^* \alpha)). \end{aligned}$$

Puisque  $d$  est premier à  $l$ , il suffit donc de montrer que  $[f^*Z]_*(f^* \alpha) = 0$ . On peut le faire pour chaque composante irréductible séparément. On peut donc supposer que  $Z' := f^*Z$  est inclus dans  $D' \times X'$  avec  $D'$  lisse. On écrit  $\iota$  pour les inclusions  $D' \hookrightarrow X'$  et  $D' \times X' \hookrightarrow X \times X'$ .

On a le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} CH^{n-1}(D' \times X') \times H^i(D', \mathcal{H}^m) & \xrightarrow{id \times pr_1^*} & CH^{n-1}(D' \times X') \times H^i(D' \times X', \mathcal{H}^m) & \xrightarrow{pr_{2,*} \circ \cup} & H^i(X', \mathcal{H}^m) \\ \downarrow \iota_* & & \downarrow \iota_* & & \downarrow \\ CH^n(X' \times X') \times H^i(X', \mathcal{H}^m) & \xrightarrow{id \times pr_1^*} & CH^n(X' \times X') \times H^i(X' \times X', \mathcal{H}^m) & \xrightarrow{pr_{2,*} \circ \cup} & H^i(X', \mathcal{H}^m). \end{array}$$

On a donc que l'action de  $[Z']$  se factorise par  $H^i(D', \mathcal{H}^m)$ , groupe qui est nul d'après l'hypothèse. Cela termine la preuve du lemme.  $\square$

**Remarque 3.2.** (i) Ce lemme s'applique aussi à des groupes  $H^i(X, \mathcal{H}^m(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(j)))$ .

(ii) Plus généralement, le lemme s'applique à des groupes  $A^i(X, M_m)$  pour un module de cycles  $M = \coprod M_m$ , sous les hypothèses que  $A^i(X, M_m)$  est de torsion  $l$ -primaire avec  $(l, \text{car}.k) = 1$  et que  $A^i(V, M_m) = 0$  pour toute

$k$ -variété  $V$  projective et lisse de dimension  $n - 1$ .

**Théorème 3.3.** *Pour  $k$  un corps de dimension cohomologique  $cd k \leq d$ , les groupes  $H^i(X, \mathcal{H}^{n+d}(\mu_{lr}^{\otimes j}))$ , où  $j \in \mathbb{Z}$  et  $(l, \text{car}.k) = 1$ , sont des invariants birationnels des  $k$ -variétés projectives et lisses, géométriquement intègres, de dimension  $n$ . De plus,*

- (i) *pour  $X/k$  lisse,  $H^i(X, \mathcal{H}^{n+d}(\mu_{lr}^{\otimes j})) \simeq H^{i+N}(\mathbb{P}_X^N, \mathcal{H}^{n+N+d}(\mu_{lr}^{\otimes(j+N)}))$ ;*
- (ii) *on a  $H^i(\mathbb{P}_k^N, \mathcal{H}^{N+d}(\mu_{lr}^{\otimes j})) = 0$  pour  $i < N$  et  $H^N(\mathbb{P}_k^N, \mathcal{H}^{N+d}(\mu_{lr}^{\otimes j})) \simeq H^d(k, \mu_{lr}^{\otimes(j-N)})$ ;*
- (iii) *si  $X$  et  $Y$  sont des  $k$ -variétés projectives et lisses, géométriquement intègres, de dimensions respectives  $n_X$  et  $n_Y$ , stablement birationnelles, i.e. telles que  $X \times \mathbb{P}_k^{N_X}$  et  $Y \times \mathbb{P}_k^{N_Y}$  sont birationnelles, alors*

$$H^i(X, \mathcal{H}^{n_X+d}(\mu_{lr}^{\otimes j})) \simeq H^{i+n_Y-n_X}(Y, \mathcal{H}^{n_Y+d}(\mu_{lr}^{\otimes(j+n_Y-n_X)})), \quad i \geq 0.$$

*Démonstration.* On raisonne comme dans [4] 3.4. Soient  $X, Y$  deux  $k$ -variétés géométriquement intègres, projectives et lisses, et soit  $\phi : X \dashrightarrow Y$  une application birationnelle. On note  $n = \dim X = \dim Y$ . L'adhérence  $\Gamma_\phi$  du graphe de  $\phi$  définit une correspondance  $[\Gamma_\phi] \in CH^n(X \times Y)$ . On note  $\Gamma_{\phi^{-1}} \subset Y \times X$  le graphe de  $\phi^{-1}$ . D'après [4] 3.5, le composé  $[\Gamma_{\phi^{-1}}] \circ [\Gamma_\phi] \in CH^n(X \times X)$  se décompose comme  $[\Gamma_{\phi^{-1}}] \circ [\Gamma_\phi] = \Delta_X + W$  où  $\Delta_X$  est la diagonale de  $X$  et  $W$  est un cycle sur  $X \times X$  supporté sur  $D \times X$ ,  $D$  étant une sous-variété fermée propre de  $X$ .

Les correspondances  $[\Gamma_\phi]$  et  $[\Gamma_{\phi^{-1}}]$  permettent de définir des applications entre les groupes  $H^i(X, \mathcal{H}^{n+d}(\mu_{lr}^{\otimes j}))$  et  $H^i(Y, \mathcal{H}^{n+d}(\mu_{lr}^{\otimes j}))$  (cf. section 2). D'après Bloch-Ogus et l'hypothèse  $cd k \leq d$ ,  $H^i(V, \mathcal{H}^{n+d}(\mu_{lr}^{\otimes j})) = 0$  pour toute  $k$ -variété projective et lisse  $V$ , de dimension  $n - 1$ . Le lemme ci-dessus, appliqué à chaque composante irréductible de  $W$  (resp. à chaque composante de  $[\Gamma_\phi] \circ [\Gamma_{\phi^{-1}}] - \Delta_Y$ ), montre alors que les applications composées induites sont des identités, d'où le premier énoncé du théorème.

D'après ce qui précède, pour établir (i), il suffit de montrer que  $H^i(X, \mathcal{H}^{n+d}(\mu_{lr}^{\otimes j})) \simeq H^{i+1}(X \times \mathbb{P}^1, \mathcal{H}^{n+d+1}(\mu_{lr}^{\otimes(j+1)}))$ . On écrit la suite de localisation pour  $Y = X \times \{\infty\} \subset X \times \mathbb{P}^1$  :

$$\begin{aligned} H^i(X \times \mathbb{A}^1, \mathcal{H}^{n+d+1}(\mu_{lr}^{\otimes(j+1)})) &\rightarrow H^i(X, \mathcal{H}^{n+d}(\mu_{lr}^{\otimes j})) \rightarrow H^{i+1}(X \times \mathbb{P}^1, \mathcal{H}^{n+d+1}(\mu_{lr}^{\otimes(j+1)})) \rightarrow \\ &\rightarrow H^{i+1}(X \times \mathbb{A}^1, \mathcal{H}^{n+d+1}(\mu_{lr}^{\otimes(j+1)})). \end{aligned}$$

On a

$$H^s(X \times \mathbb{A}^1, \mathcal{H}^{n+d+1}(\mu_{lr}^{\otimes(j+1)})) \xrightarrow{pr_X^*} H^s(X, \mathcal{H}^{n+d+1}(\mu_{lr}^{\otimes(j+1)})) = 0, \quad s \geq 0$$

d'après Bloch-Ogus ( $\dim X = n$  et  $cd k \leq d$ ). On applique cela à  $s = i$  et  $i + 1$  et on obtient l'énoncé (i).

Les énoncés (ii) et (iii) résultent de (i), ce qui termine la preuve du théorème.  $\square$

## 4 Invariants sur un corps fini

### 4.1 Rappels sur la conjecture de Kato

Soit  $X$  un schéma de type fini sur  $\mathbb{F}$ . Soit  $n$  un entier,  $(n, \text{car.}\mathbb{F}) = 1$ . Dans [16], Kato a introduit le complexe  $KC(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$  suivant :

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \bigoplus_{x \in X_{(i)}} H^{i+1}(\kappa(x), \mu_n^{\otimes i}) &\rightarrow \bigoplus_{x \in X_{(i-1)}} H^i(\kappa(x), \mu_n^{\otimes(i-1)}) \rightarrow \\ &\dots \rightarrow \bigoplus_{x \in X_{(1)}} H^2(\kappa(x), \mu_n) \rightarrow \bigoplus_{x \in X_{(0)}} H^1(\kappa(x), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

où le terme  $\bigoplus_{x \in X_{(i)}}$  est en degré  $i$ . On note  $KH_i(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$  le  $i$ -ème groupe d'homologie de ce complexe.

Pour  $l$  un nombre premier différent de la caractéristique de  $\mathbb{F}$ , on pose  $KC(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l) = \varinjlim KC(X, \mathbb{Z}/l^m\mathbb{Z})$  et on note  $KH_i(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l)$  son  $i$ -ème groupe d'homologie.

Pour  $X$  projective et lisse, géométriquement intègre, Kato [16] a conjecturé l'exactitude de ces complexes, sauf au terme 0. Cette conjecture a été récemment démontrée par Kerz et Saito :

**Théorème 4.1.** (Kerz et Saito [17], Thm.0.4) *Soit  $X$  une variété projective et lisse sur  $\mathbb{F}$  et soit  $l$  un nombre premier,  $(l, \text{car.}\mathbb{F}) = 1$ . Alors  $KH_i(X, \mathbb{Z}/l^m\mathbb{Z}) = 0$  pour tout  $i > 0$  et  $m > 0$  et  $KH_0(X, \mathbb{Z}/l^m\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/l^m\mathbb{Z}$ .*

D'après la définition, pour  $X$  une  $\mathbb{F}$ -variété projective et lisse, de dimension  $n$ ,  $H^i(X, \mathcal{H}^{n+1}(\mu_{l^m}^{\otimes n})) = KH_{n-i}(X, \mathbb{Z}/l^m\mathbb{Z})$ . Ces invariants birationnels sont donc tous nuls, sauf le dernier.

Pour  $j \neq n$  et pour les coefficients  $\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l$ , un lemme de Sato et Saito permet de voir aussi la nullité des groupes  $H^i(X, \mathcal{H}^{n+1}((\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l)(j)))$ , ce qui n'utilise pas la conjecture de Kato. En effet, on a dans ce cas que tous les termes dans la résolution de Bloch-Ogus du faisceau  $\mathcal{H}^{n+1}(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(j))$  sont nuls.

**Proposition 4.2.** (Kahn [10]; Saito et Sato [22], Lemma 2.7) *Soit  $L$  un corps de degré de transcendance  $r$  sur  $\mathbb{F}$ . Soit  $l$  un nombre premier,  $(l, \text{car.}\mathbb{F}) = 1$ . Alors*

$$H^{r+1}(L, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(j)) = 0$$

*pour tout  $j \neq r$ . En particulier, pour  $X$  une variété projective et lisse sur  $\mathbb{F}$  de dimension  $n$  et pour tout  $j \neq n$  le faisceau  $\mathcal{H}^{n+1}(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(j))$  est identiquement nul, ainsi que tous les termes de sa résolution de Bloch-Ogus. Ainsi,  $H^i(X, \mathcal{H}^{n+1}(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(j))) = 0$  pour tout  $i$  et pour  $j \neq n$ .*

Quant aux coefficients finis, en utilisant la méthode de Bruno Kahn [10], on établit aussi la nullité des groupes  $H^i(X, \mathcal{H}^{n+1}(\mu_{l^m}^{\otimes j}))$  pour  $j \in \mathbb{Z}$  et  $i < n$  comme une conséquence de la conjecture de Kato. Cette méthode utilise également la

conjecture de Bloch-Kato. Donnons ici les arguments.

**Proposition 4.3.** *Soit  $X$  une variété projective et lisse sur  $\mathbb{F}$ , de dimension  $n$ , et soit  $l$  un nombre premier,  $(l, \text{car.}\mathbb{F}) = 1$ . Alors  $H^i(X, \mathcal{H}^{n+1}(\mu_{l^m}^{\otimes j})) = 0$  pour  $i < n$  et  $m > 0$ .*

*Démonstration.* Soit  $L/\mathbb{F}$  une extension galoisienne, de groupe  $G$ , qui trivialise le faisceau  $\mu_{l^m}^{\otimes(j-n)}$  et qui est minimale pour cette propriété. Soit  $\pi : Y = X \times_{\mathbb{F}} L \rightarrow X$  le revêtement de  $X$  correspondant. Soit  $\mathcal{F} = \mathcal{H}_Y^{n+1}(\mu_{l^m}^{\otimes j})$  et soit

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow F^0 \rightarrow F^1 \rightarrow \dots \rightarrow F^n \rightarrow 0$$

la résolution de Gersten de  $\mathcal{F}$ .

**Lemme 4.4.** *(i) on a  $\hat{H}^*(G, \pi_* F^i) = 0$  ;  
(ii)  $(\pi_* \mathcal{F})^G \simeq \mathcal{H}_X^{n+1}(\mu_{l^m}^{\otimes j})$ .*

*Démonstration.* (cf. [10] prop.2) D'après la définition,  $F^i$  est la somme directe sur les points de codimension  $i$  de  $Y$  des faisceaux  $\imath_{y,*} H^{n+1-i}(\kappa(y), \mu_{l^m}^{\otimes(j-i)})$ . Pour établir (i), il suffit donc de voir que  $\hat{H}^*(G, H^{n+1-i}(\kappa(x) \otimes_X Y, \mu_{l^m}^{\otimes(j-i)})) = 0$  pour  $i > 0$  et pour tout point  $x \in X^{(i)}$ . Si  $y$  est un point de  $Y$  au-dessus de  $x$  et  $D_y \subset G$  son groupe de décomposition, on a  $\hat{H}^*(G, H^{n+1-i}(\kappa(x) \otimes_X Y, \mu_{l^m}^{\otimes(j-i)})) = \hat{H}^*(D_y, H^{n+1-i}(\kappa(y), \mu_{l^m}^{\otimes(j-i)}))$  d'après le lemme de Shapiro. On peut donc supposer que  $G$  est le groupe de décomposition de  $y$ .

Sous la condition  $\text{cd}_l \kappa(x) \leq n + 1 - i$ , on a un isomorphisme

$$H^{n+1-i}(\kappa(y), \mu_{l^m}^{\otimes(j-i)})_G \rightarrow H^{n+1-i}(\kappa(x), \mu_{l^m}^{\otimes(j-i)}),$$

induit par la corestriction. On peut le voir par exemple en utilisant une suite spectrale de Tate ([23], appendice au ch. 1, Th. 1)

$$E_{pq}^2 = H_p(G, H^{n+1-i-q}(\kappa(y), \mu_{l^m}^{\otimes(j-i)})) \Rightarrow H^{n+1-i-p-q}(\kappa(x), \mu_{l^m}^{\otimes(j-i)}).$$

Puisque  $G$  est cyclique ( $\mathbb{F}$  est un corps fini), pour conclure, il suffit d'établir que la restriction induit un isomorphisme  $H^{n+1-i}(\kappa(x), \mu_{l^m}^{\otimes(j-i)}) \rightarrow H^{n+1-i}(\kappa(x), \mu_{l^m}^{\otimes(j-i)})^G$ . Sous la conjecture de Bloch-Kato, c'est l'énoncé (1) du Th. 1 de Bruno Kahn [11].  $\square$

Pour montrer la proposition, on utilise la cohomologie mixte de Grothendieck. On a deux suites spectrales ([7], 5.2.1) :

$$\begin{aligned} E_2^{pq} &= H^p(G, H^q(X_{Zar}, \pi_* \mathcal{F})) \Rightarrow H^{p+q}(X_{Zar}, G; \pi_* \mathcal{F}) \\ E_2'^{pq} &= H^p(X_{Zar}, H^q(G, \pi_* \mathcal{F})) \Rightarrow H^{p+q}(X_{Zar}, G; \pi_* \mathcal{F}) \end{aligned}$$

où les  $H^i(X_{Zar}, G; \mathcal{G})$  désignent les foncteurs dérivés du foncteur

$$\mathcal{G} \mapsto \Gamma(X, \mathcal{G})^G$$



de la catégorie des faisceaux de Zariski sur  $X$ , munis d'une action de  $G$ , compatible avec l'action triviale de  $G$  sur  $X$ , dans la catégorie des groupes abéliens.

D'après le lemme de Shapiro, les termes de la première suite  $E_2^{pq}$  se récrivent comme  $E_2^{pq} = H^p(G, H^q(Y_{Zar}, \mathcal{F}))$ . Ainsi, pour  $p < n$ , le théorème 4.1 et la suite  $E_2^{pq}$  donnent

$$H^p(X_{Zar}, G; \pi_* \mathcal{F}) = 0. \quad (2)$$

D'après [10], prop. 3, la suite

$$0 \rightarrow H^q(G, \pi_* F^0) \rightarrow H^q(G, \pi_* F^1) \rightarrow \dots \rightarrow H^q(G, \pi_* F^n) \rightarrow 0$$

est une résolution flasque de  $H^q(G, \pi_* \mathcal{F})$ . Ainsi,  $H^p(X_{Zar}, H^q(G, \pi_* \mathcal{F})) = 0$ ,  $q > 0$ , d'après le lemme précédent. La suite  $E_2^{pq}$  et le (ii) du lemme donnent alors des isomorphismes pour tout  $p \geq 0$  :

$$H^p(X_{Zar}, G; \pi_* \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} H^p(X_{Zar}, H^0(G, \pi_* \mathcal{F})).$$

D'après 4.4(ii) et (2), cela donne, pour  $0 \leq p < n$

$$0 = H^p(X_{Zar}, G; \pi_* \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} H^p(X, \mathcal{H}_X^{n+1}(\mu_{l^m}^{\otimes j})).$$

Cela termine la preuve de la proposition.  $\square$

## 4.2 Les invariants

Sur un corps fini, on a des analogues du théorème 3.3.

**Théorème 4.5.** *Soit  $\mathbb{F}$  un corps fini. Les groupes  $H^i(X, \mathcal{H}^n(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(n-1)))$  où  $i < n-1$  et  $(l, \text{car}(\mathbb{F})) = 1$ , sont des invariants birationnels des  $\mathbb{F}$ -variétés projectives et lisses, géométriquement intègres, de dimension  $n$ . De plus,*

- (i) *pour  $X/\mathbb{F}$  projective et lisse, de dimension  $n$  et pour  $i < n-1$  on a  $H^i(X, \mathcal{H}^n(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(n-1))) \simeq H^{i+N}(\mathbb{P}_X^N, \mathcal{H}^{n+N}(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(n-1)))$  ;*
- (ii) *on a  $H^i(\mathbb{P}_k^N, \mathcal{H}^N(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(n-1))) = 0$  pour  $i < N-1$  ;*
- (iii) *si  $X$  et  $Y$  sont des  $k$ -variétés projectives et lisses, géométriquement intègres, de dimensions respectives  $n_X \leq n_Y$ , stablement birationnelles, i.e. telles que  $X \times \mathbb{P}_k^{N_X}$  et  $Y \times \mathbb{P}_k^{N_Y}$  sont birationnelles, alors*

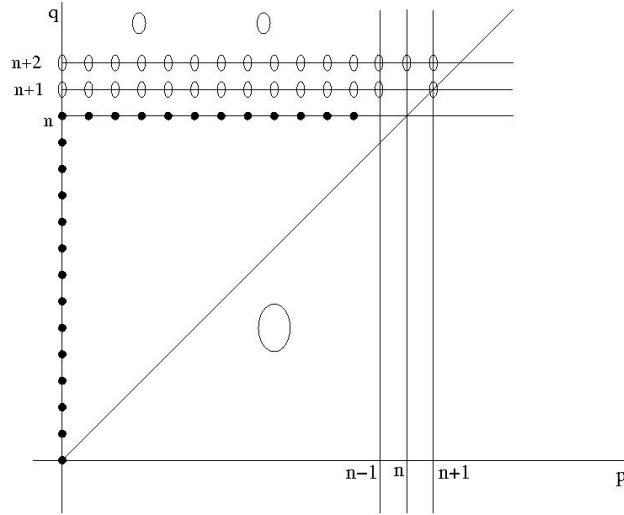
$$H^i(X, \mathcal{H}^{n_X}(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(n-1))) \simeq H^{i+n_Y-n_X}(Y, \mathcal{H}^{n_Y}(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(n-1))), \quad i < n_X - 1.$$

*Démonstration.* On procède comme dans la preuve de 3.3. Avec les mêmes notations, pour établir la première partie, il suffit de montrer que la correspondance  $[W]$  agit trivialement sur  $H^i(X, \mathcal{H}^n(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(n-1)))$ . Cela résulte du lemme 3.1, car les groupes  $H^i(V, \mathcal{H}^m(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(n-1)))$ ,  $i < n-1$ , sont nuls pour toute  $k$ -variété projective et lisse  $V$ , de dimension  $n-1$ , d'après le théorème de Kerz et Saito 4.1. On obtient l'énoncé (i) en utilisant la suite de localisation et le fait que  $H^i(X \times \mathbb{A}^1, \mathcal{H}^{n+1}(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(n-1))) \xrightarrow{pr_X^*} H^i(X, \mathcal{H}^{n+1}(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(n-1))) = 0$ ,  $i < n-1$ , d'après 4.2 ; (ii) et (iii) en résultent.

□

Notons que pour  $i = n - 1$  le groupe  $H^{n-1}(X, \mathcal{H}^n(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(n-1)))$  n'est pas un invariant birationnel. En effet, ce groupe est dual de  $H_{\text{ét}}^2(X, \mathbb{Z}_l(1))$  (cf. [19] 1.14).

Pour des variétés projectives et lisses, de dimension  $n$  sur un corps fini  $\mathbb{F}$  on a ainsi le schéma suivant de la page  $E_2$  de suite spectrale de Bloch et Ogus [1]  $E_2^{pq} = H^p(X, \mathcal{H}^q(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(n-1))) \Rightarrow H_{\text{ét}}^{p+q}(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(n-1))$ , où les lignes  $p = 0$  et  $q = n$  (sauf pour les points  $p = n - 1$  et  $p = n$ ) consistent d'invariants birationnels (cf. [2] 4.4.1 pour la ligne  $p = 0$ ).



**Remarque 4.6.** L'énoncé du théorème ci-dessus vaut aussi dans les deux cas suivants :

- (i) Pour les groupes  $H^i(X, \mathcal{H}^n(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(j)))$  où  $i \geq 0$ ,  $j \neq n - 1$  et  $(l, \text{car.}\mathbb{F}) = 1$ . Dans ce cas, comme dans la preuve du théorème ci-dessus, pour appliquer le lemme 3.1, on utilise 4.2 pour voir que les groupes  $H^i(V, \mathcal{H}^n(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(n-1)))$  sont nuls pour  $V$  projective et lisse de dimension  $n - 1$ . Cela n'utilise donc pas la conjecture de Kato.
- (ii) Pour les groupes  $H^i(X, \mathcal{H}^{n+1}(\mu_{l^m}^{\otimes j}))$  où  $i < n - 1$  et  $(l, \text{car.}\mathbb{F}) = 1$ . Dans ce cas on utilise 4.3 pour appliquer le lemme 3.1.

### 4.3 Lien avec les 1-cycles

Pour  $k$  un corps,  $X$  un  $k$ -schéma lisse et  $A$  un groupe abélien, on dispose d'un complexe de faisceaux  $A_X(n)_{\text{ét}}$  (resp.  $A_X(n)$  pour le complexe de faisceaux Zariski), défini à partir du complexe de cycles de Bloch  $z^n(X, \cdot)$  (cf. par exemple [15] 2.2). On note  $\mathbb{H}_{\text{ét}}^i(X, A_X(n))$  (resp.  $\mathbb{H}^i(X, A_X(n))$ ) l'hypercohomologie de ce complexe.

Pour  $n = 0$  on a  $\mathbb{Z}_X(0) = \mathbb{Z}$ . Pour  $n = 1$  le complexe  $\mathbb{Z}_X(1)$  est quasi-isomorphe à  $\mathbb{G}_m[-1]$  (cf. par exemple [15] (2.4)).

Pour  $X$  quasi-projectif et lisse, on a  $CH^n(X, 2n - i) \simeq \mathbb{H}^i(X, \mathbb{Z}_X(n))$ .

Pour  $X$  lisse, on a une suite spectrale de coniveau ([14] 2.7),

$$E_1^{p,q} = \bigoplus_{x \in X^{(p)}} \mathbb{H}_{\text{ét}}^{q-p}(\kappa(x), \mathbb{Z}(n-p)) \Rightarrow \mathbb{H}_{\text{ét}}^{p+q}(X, \mathbb{Z}_X(n))$$

où

1. pour  $q \geq n + 2$ ,  $E_2^{p,q} = H^p(X, \mathcal{H}^{q-1}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(n)))$ , cf. [12] 5.1.
2.  $E_1^{p,q} = 0$  pour  $q = n + 1$  (sous la conjecture de Bloch-Kato, qui est maintenant établie par Voevodsky [24]), cf. [14] 2.7.

**Théorème 4.7.** *Soit  $X$  une  $\mathbb{F}$ -variété projective et lisse, de dimension  $n$ . On a une suite exacte à la car. $\mathbb{F}$ -torsion près*

$$H^{n-4}(X, \mathcal{H}^n(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(n-1))) \rightarrow CH^{n-1}(X) \rightarrow \mathbb{H}_{\text{ét}}^{2n-2}(X, \mathbb{Z}_X(n-1)) \rightarrow H^{n-3}(X, \mathcal{H}^n(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(n-1))) \rightarrow 0$$

*Démonstration.* On dispose d'une suite spectrale de coniveau pour  $\mathbb{Z}_X(n-1)$  :

$$E_1^{p,q} = \bigoplus_{x \in X^{(p)}} \mathbb{H}_{\text{ét}}^{q-p}(\kappa(x), \mathbb{Z}(n-1-p)) \Rightarrow \mathbb{H}_{\text{ét}}^{p+q}(X, \mathbb{Z}_X(n-1)).$$

On a :

1.  $E_2^{p,q} = E_1^{p,q} = 0$  pour  $p \geq n + 1$  car  $X^{(p)}$  est vide pour un tel  $p$ .
2. la ligne  $E_2^{p,n}$  est constituée de zéros, sous la conjecture de Bloch-Kato ;
3.  $E_2^{n+1} = H^p(X, \mathcal{H}^n(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(n-1)))$  ;
4. à la  $p$ -torsion près,  $E_2^{p,n+2} = H^p(X, \mathcal{H}^{n+1}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(n-1))) = 0$  d'après 4.2 ;
5. pour  $q \geq n + 3$ ,  $E_2^{p,q} = H^p(X, \mathcal{H}^{q-1}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(n))) = 0$  d'après Bloch-Ogus ( $\dim X = n$  et  $cd\mathbb{F} \leq 1$ ) ;
6. pour  $q = n - 1$  et pour  $q = n - 2$ ,  $E_2^{n,q} = E_1^{n,q} = 0$ . En effet, pour  $F$  un corps et pour  $m < 0$ , on a  $H^r(F, \mathbb{Z}(m)) = H^{r-1}(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(m-1)) = 0$  pour  $r \leq 0$ , cf. [12] 2.4.
7.  $E_2^{n-1,n-1} = CH^{n-1}(X)$ . En effet,  $E_1^{n-1,n-1} = \bigoplus_{x \in X^{(n-1)}} \mathbb{H}_{\text{ét}}^0(\kappa(x), \mathbb{Z}) = \bigoplus_{x \in X^{(n-1)}} \mathbb{Z}$  et  $E_1^{n-2,n-1} = \bigoplus_{x \in X^{(n-2)}} \mathbb{H}_{\text{ét}}^1(\kappa(x), \mathbb{Z}(1)) = \bigoplus_{x \in X^{(n-2)}} \kappa(x)^*$ .

Ainsi, à la  $p$ -torsion près, dans la filtration sur  $\mathbb{H}_{\text{ét}}^{2n-2}(X, \mathbb{Z}_X(n-1))$ , on n'a que deux termes

$$E_{\infty}^{n-3,n+1} = E_2^{n-3,n+1} = H^{n-3}(X, \mathcal{H}^n(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(n-1)))$$

et

$$E_{\infty}^{n-1,n-1} = E_2^{n-1,n-1} / E_2^{n-4,n+1} = CH^{n-1}(X) / H^{n-4}(X, \mathcal{H}^n(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(n-1))).$$

On obtient ainsi la suite du théorème.  $\square$

La méthode de Colliot-Thélène et Kahn [3] 2.1 permet de relier le groupe  $H^{n-3}(X, \mathcal{H}^n(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(n-1)))$  avec le conoyau de l'application classe de cycle  $CH^{n-1}(X) \otimes \mathbb{Z}_l \rightarrow H^{2n-2}(X, \mathbb{Z}_l(n-1))$ . Rappelons que pour un corps  $k$  on dit que  $k$  est à cohomologie galoisienne finie, si pour tout module galoisien fini  $M$  et tout entier  $i \geq 0$ , les groupes de cohomologie  $H^i(k, M)$  sont finis. L'énoncé suivant pour  $i = 2$  est dans [3] 2.1. La preuve du cas général utilise les mêmes arguments, on les détaille ci-dessous.

**Théorème 4.8.** (cf. [3] 2.1) *Soient  $k$  un corps à cohomologie galoisienne finie,  $X$  une  $k$ -variété lisse et  $l$  un nombre premier,  $(l, \text{car}.k) = 1$ . Soit  $i \geq 0$ . Posons*

$$M = \text{Coker}[CH^i(X) \otimes \mathbb{Z}_l \rightarrow H_{\text{ét}}^{2i}(X, \mathbb{Z}_l(i))]$$

*le conoyau de l'application classe de cycle  $l$ -adique étale et*

$$C = \text{Coker}[CH^i(X) \rightarrow \mathbb{H}_{\text{ét}}^{2i}(X, \mathbb{Z}_X(i))]$$

*le conoyau de l'application classe de cycle motivique étale.*

*Alors le groupe (fini) de torsion  $M_{\text{tors}}$  est isomorphe au quotient du groupe  $C\{l\}$  de torsion  $l$ -primaire de  $C$  par son sous-groupe divisible maximal.*

**Remarque 4.9.** Le groupe  $C$  est de torsion. En effet, il résulte de [15] (2.2) et 2.6(c) qu'on a un isomorphisme  $CH^i(X) \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} H_{\text{Zar}}^{2i}(X, \mathbb{Q}_X(i)) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}_{\text{ét}}^{2i}(X, \mathbb{Q}_X(i))$ .

En combinant le théorème ci-dessus avec le théorème 4.7, on obtient

**Corollaire 4.10.** *Soit  $X$  une  $\mathbb{F}$ -variété projective et lisse, de dimension  $n$  et soit  $l$  un nombre premier,  $(l, \text{car}.\mathbb{F}) = 1$ . Alors le groupe (fini) de torsion du conoyau de l'application classe de cycle  $CH^{n-1}(X) \otimes \mathbb{Z}_l \rightarrow H_{\text{ét}}^{2n-2}(X, \mathbb{Z}_l(n-1))$  est isomorphe au quotient du groupe  $H^{n-3}(X, \mathcal{H}^n(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(n-1)))$  par son sous-groupe divisible maximal.*

**Remarque 4.11.** (i) Si  $n \geq 2$  et si  $\text{Br } X$  est fini (ce qui est le cas sous la conjecture de Tate pour les cycles de codimension 1), le conoyau de l'application  $CH^{n-1}(X) \otimes \mathbb{Z}_l \rightarrow H^{2n-2}(X, \mathbb{Z}_l(n-1))$  est fini ([3] 7.3).  
(ii) Pour  $X$  une variété appartenant à la classe  $B_{\text{Tate}}(\mathbb{F})$  (conjecturalement, c'est le cas pour toute  $\mathbb{F}$ -variété projective et lisse), le groupe  $\mathbb{H}_{\text{ét}}^{2n-2}(X, \mathbb{Z}_X(n-1))$  est de type fini ([13] 3.10). Ainsi, le groupe  $H^{n-3}(X, \mathcal{H}^n(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(n-1)))$  est conjecturalement fini.

**Remarque 4.12.** Soit  $X$  une  $\mathbb{F}$ -variété projective et lisse, de dimension  $n$ , munie d'un morphisme  $\phi : X \rightarrow C$  où  $C$  est une courbe projective et lisse, géométriquement connexe. Soit  $l$  un nombre premier,  $(l, \text{car}.\mathbb{F}) = 1$ . D'après un théorème de Saito [21], si l'application classe de cycle  $l$ -adique  $CH^{n-1}(X) \otimes \mathbb{Z}_l \rightarrow$

$H_{\text{ét}}^{2n-2}(X, \mathbb{Z}_l(n-1))$  est surjective, alors l'existence d'un zéro-cycle de degré premier à  $l$  sur la fibre générique  $X_\eta$  de l'application  $\phi$  se détecte seulement en utilisant l'obstruction de Brauer-Manin. Plus précisément, s'il existe sur  $X_\eta$  une famille de zéro-cycles locaux de degré 1, orthogonale au groupe de Brauer de  $X_\eta$  via l'accouplement de Brauer-Manin (cf. [18]), alors il existe sur  $X_\eta$  un zéro-cycle de degré premier à  $l$ .

*Démonstration du théorème 4.8.* Pour montrer ce théorème, on va d'abord établir qu'on a une application naturelle  $\phi : \mathbb{H}_{\text{ét}}^{2i}(X, \mathbb{Z}_X(i)) \otimes \mathbb{Z}_l \rightarrow H^{2i}(X, \mathbb{Z}_l(i))$  telle que

- (i) conoyau de  $\phi$  est sans torsion ;
- (ii) l'application induite

$$\phi/l^r : [\mathbb{H}_{\text{ét}}^{2i}(X, \mathbb{Z}_X(i)) \otimes \mathbb{Z}_l]/l^r \rightarrow H^{2i}(X, \mathbb{Z}_l(i))/l^r$$

est injective.

On dispose d'un triangle exact (cf. [15] 2.6)

$$\mathbb{Z}_{\text{ét}}(i) \xrightarrow{\times l^r} \mathbb{Z}_{\text{ét}}(i) \rightarrow \mu_{l^r}^{\otimes i}.$$

En prenant l'hypercohomologie, on en déduit une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathbb{H}_{\text{ét}}^{2i}(X, \mathbb{Z}_X(i))/l^r \rightarrow H_{\text{ét}}^{2i}(X, \mu_{l^r}^{\otimes i}) \rightarrow \mathbb{H}_{\text{ét}}^{2i+1}(X, \mathbb{Z}_X(i))[l^r] \rightarrow 0. \quad (3)$$

Puisque le groupe de milieu est fini, on obtient une suite exacte en passant à la limite projective :

$$0 \rightarrow \varprojlim [\mathbb{H}_{\text{ét}}^{2i}(X, \mathbb{Z}_X(i))/l^r] \rightarrow H_{\text{ét}}^{2i}(X, \mathbb{Z}_l(i)) \rightarrow \varprojlim [\mathbb{H}_{\text{ét}}^{2i+1}(X, \mathbb{Z}_X(i))[l^r]] \rightarrow 0. \quad (4)$$

Les applications  $\mathbb{H}_{\text{ét}}^{2i}(X, \mathbb{Z}_X(i)) \rightarrow \mathbb{H}_{\text{ét}}^{2i}(X, \mathbb{Z}_X(i))/l^r$  induisent une application  $\mathbb{H}_{\text{ét}}^{2i}(X, \mathbb{Z}_X(i)) \otimes \mathbb{Z}_l \rightarrow \varprojlim [\mathbb{H}_{\text{ét}}^{2i}(X, \mathbb{Z}_X(i))/l^r]$  qui est surjective d'après [3] 2.2 (ii). On définit alors  $\phi$  comme une application composée

$$\phi : \mathbb{H}_{\text{ét}}^{2i}(X, \mathbb{Z}_X(i)) \otimes \mathbb{Z}_l \rightarrow \varprojlim [\mathbb{H}_{\text{ét}}^{2i}(X, \mathbb{Z}_X(i))/l^r] \rightarrow H_{\text{ét}}^{2i}(X, \mathbb{Z}_l(i)).$$

Son conoyau est sans torsion car le terme de droite de la suite (4) l'est, puisque c'est un module de Tate.

L'injectivité de  $\phi/l^r$  résulte du diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} [\mathbb{H}_{\text{ét}}^{2i}(X, \mathbb{Z}_X(i)) \otimes \mathbb{Z}_l]/l^n & \longrightarrow & \mathbb{H}_{\text{ét}}^{2i}(X, \mathbb{Z}_l(i))/l^n \\ \phi/l^n \downarrow & & \downarrow \\ H_{\text{ét}}^{2i}(X, \mathbb{Z}_l(i))/l^n & \longrightarrow & H_{\text{ét}}^{2i}(X, \mu_{l^n}^{\otimes i}). \end{array}$$

où les applications du bas et de droite sont injectives (cf. la suite (3) pour celle de droite) et l'application du haut est un isomorphisme d'après [3] 2.2 (i).

Puisque  $C$  est de torsion (cf. 4.9), on a un diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
CH^i(X) \otimes \mathbb{Z}_l & \longrightarrow & \mathbb{H}_{\text{ét}}^{2i}(X, \mathbb{Z}_X(i)) \otimes \mathbb{Z}_l & \longrightarrow & C\{l\} & \longrightarrow & 0 \\
\cong \downarrow & & \phi \downarrow & & \psi_0 \downarrow & & \\
CH^i(X) \otimes \mathbb{Z}_l & \longrightarrow & H^{2i}(X, \mathbb{Z}_l(i)) & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

où l'application  $\psi_0$  est induite par le diagramme. Notons que la commutativité du carré de gauche de ce diagramme, i.e. la compatibilité des applications classe de cycle résulte de [15] 3.1.

Comme  $C\{l\}$  est un groupe de torsion, l'application  $\psi_0$  induit une application  $\psi : C\{l\} \rightarrow M_{\text{tors}}$ . Puisque le conoyau de  $\phi$  est sans torsion, on déduit par chasse au diagramme que  $\psi$  est surjective. Puisqu'on a de plus que  $\phi/l^n$  est injective, on en déduit qu'on a un isomorphisme  $\psi/l^n : C\{l\}/l^n \rightarrow M_{\text{tors}}/l^n$ .

Puisque le groupe  $M_{\text{tors}}$  est fini, on a  $M \simeq M/l^N$  pour  $N$  assez grand, i.e. pour  $N \geq N_0$ . Pour un tel  $N$ , on a donc un isomorphisme  $l^{N+1}C\{l\} \simeq l^N C\{l\}$ . Ainsi, le groupe  $l^{N_0}C\{l\}$  est le sous-groupe divisible maximal de  $C\{l\}$  et le quotient de  $C\{l\}$  par ce sous-groupe est isomorphe à  $M_{\text{tors}}$ .  $\square$

## Références

- [1] S. Bloch, A. Ogus, *Gersten's conjecture and the homology of schemes*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **7** (1974), 181–201 (1975).
- [2] J.-L. Colliot-Thélène, *Birational invariants, purity and the Gersten conjecture*, *K-theory and algebraic geometry : connections with quadratic forms and division algebras* (Santa Barbara, CA, 1992), 1–64, Proc. Sympos. Pure Math., **58**, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.
- [3] J.-L. Colliot-Thélène et B. Kahn, *Cycles de codimension 2 et  $H^3$  non ramifié pour les variétés sur les corps finis*, arXiv :1104.3350v1.
- [4] J.-L. Colliot-Thélène et C. Voisin, *Cohomologie non ramifiée et conjecture de Hodge entière*, arXiv :1005.2778v1.
- [5] F. Déglise, *Transferts sur les groupes de Chow à coefficients*, Math. Z. 252 (2006), no. 2, 315–343.
- [6] W. Fulton, *Intersection theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [7] A. Grothendieck, *Sur quelques points d'algèbre homologique*, Tôhoku Math. J. (2) **9** (1957) 119–221.
- [8] L. Illusie, *On Gabber's refined uniformization*, disponible sur [http ://www.math.u-psud.fr/~illusie/](http://www.math.u-psud.fr/~illusie/)
- [9] U. Jannsen and S. Saito, *Kato conjecture and motivic cohomology over finite fields*, arXiv :0910.2815.
- [10] B. Kahn, *Résultats de "pureté" pour les variétés lisses sur un corps fini* (appendice à un article de J.-L. Colliot-Thélène), Actes du Colloque de K-théorie algébrique de Lake Louise, décembre 1991 (P.G Goerss, J.F. Jardine, ed.), Algebraic K-theory and algebraic topology, NATO ASI Series, Ser. C. **407** (1993), 57–62.

- [11] B. Kahn, *Deux théorèmes de comparaison en cohomologie étale : applications*, Duke Math. J. **69** (1993), no. 1, 137–165.
- [12] B. Kahn, *Motivic cohomology of smooth geometrically cellular varieties*, Algebraic K-theory (Seattle, WA, 1997), 149–174, Proc. Sympos. Pure Math., **67**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
- [13] B. Kahn, *Équivalences rationnelle et numérique sur certaines variétés de type abélien sur un corps fini*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **36** (2003), no. 6, 977–1002 (2004).
- [14] B. Kahn, *Cohomological approaches to  $SK_1$  and  $SK_2$  of central simple algebras*, Documenta Mathematica, Extra Volume : Andrei A. Suslin’s Sixtieth Birthday (2010), 317–369.
- [15] B. Kahn, *Classes de cycles motiviques étales*, arXiv :1102.0375v2.
- [16] K. Kato, *A Hasse principle for two-dimensional global fields*, J. reine angew. Math. **366** (1986), 142–183.
- [17] M. Kerz and S. Saito, *Cohomological Hasse principle and motivic cohomology for arithmetic schemes*, arXiv :1010.5930v1.
- [18] Yu. I. Manin, *Le groupe de Brauer-Grothendieck en géométrie diophantienne*, Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970), Tome 1, pp. 401–411. Gauthier-Villars, Paris, 1971.
- [19] J.S. Milne, *Values of zeta functions of varieties over finite fields*, Amer. J. Math. **108** (1986), no. 2, 297–360.
- [20] M. Rost, *Chow groups with coefficients*, Doc. Math. 1 (1996), No. 16, 319–393.
- [21] S. Saito, *Some observations on motivic cohomology of arithmetic schemes*, Invent. Math. **98** (1989), no. 2, 371–404.
- [22] S. Saito and K. Sato, *A finiteness theorem for zero-cycles over  $p$ -adic fields*, with an appendix by U. Jannsen, Ann. of Math. (2) **172** (2010), no. 3, 1593–1639.
- [23] J-P. Serre, *Cohomologie galoisienne*, Lecture Notes in Mathematics **5**, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [24] V. Voevodsky, *On motivic cohomology with  $\mathbb{Z}/l$  coefficients*, arXiv :0805.4430v2, à paraître dans Ann. of Math.